128 - ENSET 81

DURÉE : 4 heures

On désigne par $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels et par* Log *la fonction logarithme népérien.*

On se donne deux nombres réels x *et* y *vérifiant* $0 < x < y$ *qui sont fixés pour tout le problème.*

I

1° Si α est un nombre réel non nul, on pose :

$$h(\alpha) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

a. Montrer que la fonction h est continue, et que $h(\alpha)$ a une limite quand α tend vers 0.

b. En déduire qu'il existe une application continue H de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $H(\alpha) = h(\alpha)$ pour tout nombre réel α non nul.

Calculer $H(0)$, $H\left(\frac{1}{2}\right)$ et $H(1)$.

2° Montrer de même qu'il existe une application continue K de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout nombre réel α différent de 0 et de 1

$$K(\alpha) = \left[\frac{y^\alpha - x^\alpha}{\alpha(y-x)}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Calculer $K(-1)$, $K(0)$, $K\left(\frac{1}{2}\right)$, $K(1)$ et $K(2)$.

3° Étudier le comportement de $H(\alpha)$ et de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. Faire de même lorsque α tend vers $-\infty$.

Tournez la page S. V. P.

4° Montrer que pour tout nombre réel α on a :

$$x < H(\alpha) < y$$

ainsi que :

$$x < K(\alpha) < y$$

II

1° *a.* Étudier le sens de variation de l'application :

$$u : t \in]0, +\infty[\longrightarrow 3 \operatorname{Log} t - 8 \frac{t^3 - 1}{(t+1)^3}$$

b. En déduire l'inégalité :

$$H\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{y - x}{\operatorname{Log} y - \operatorname{Log} x}$$

2° *a.* Étudier le sens de variation de l'application :

$$v : t \in]0, +\infty[\longrightarrow \frac{(t+1)(t^3-1)}{t(t^2+1)} - 3 \operatorname{Log} t$$

puis celui de l'application :

$$w : t \in]1, +\infty[\longrightarrow 2 \frac{\operatorname{Log} t}{t-1} - 3 \operatorname{Log}\left(1 + t^{-\frac{2}{3}}\right)$$

b. En déduire l'inégalité :

$$H\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}$$

III

1° Soit λ un nombre réel non nul, on lui associe l'application :

$$g_\lambda : z \in]0, 1[\longrightarrow \frac{(1+z)^\lambda - (1-z)^\lambda}{2\lambda}$$

a. Montrer qu'il existe des nombres réels $a_n(\lambda)$ que l'on déterminera tels que :

$$\forall z \in]0,1[\qquad g_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) z^n$$

b. Soit μ un nombre réel, comparer les deux nombres :

$$(\lambda - 2\mu + 1)(\lambda - 2\mu) \quad \text{et} \quad (4 - \lambda - 2\mu)(3 - \lambda - 2\mu)$$

c. En déduire que pour λ différent de 3 :

si $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(3 - 2\lambda) > 0$ $\quad g_\lambda(z) > g_{3-\lambda}(z)$

si $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(3 - 2\lambda) < 0$ $\quad g_\lambda(z) < g_{3-\lambda}(z)$

si $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(3 - 2\lambda) = 0$ $\quad g_\lambda(z) = g_{3-\lambda}(z)$

2° Soit α différent de -1, de 0 et de 1, on pose

$$\lambda = \frac{3}{\alpha + 1}.$$

a. Montrer que :

$$\forall u \in]1, \infty[\quad \exists z \in]0,1[\quad u = \frac{1+z}{1-z}$$

b. En déduire qu'il existe $z \in]0, 1[$ tel que :

$$\left(\frac{K(\alpha)}{H\left(\frac{\alpha+1}{3}\right)}\right)^{1-\alpha} = \frac{g_\lambda(z)}{g_{3-\lambda}(z)}$$

3° Déterminer l'ensemble des nombres réels α tels que

$$K(\alpha) \leqslant H\left(\frac{\alpha+1}{3}\right).$$

Dans quels cas y-a-t-il égalité?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail